Kısmi Dif. Denk I Ara Sınav 05.12.2021

1) $2x = 3(z+1)^2 + x^2 - 3y^2 + 1$ yüzeyinin $A(x_0,-1,0)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemi varsa bulunuz.

2) Merkezi $z=0$ düzlemi üzerinde ve yarıçapı 1 olan küre ailesinin kısmi dif. denklemini bulunuz.

3) $y = f(x) + g(z)$ yüzey ailesinin kısmi dif. denklemini bulunuz.

3) $F(\cos x + yz,\ e^{-y} + z^2) = 0$ yüzey ailesinin kısmi dif. denk bulunuz.

4) $z_x + 2x z_y + \frac{2x}{y} z = y - x^2 - 1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

5) Aşağıda denklemleri verilmiş olan ifadelerin üç boyutlu uzayda ne belirttiğini yazınız.

a) $y = x+1$, b) $y = x^2 - 1$, c) $x^2 - y^2 = 1$, d) $z = x^2 + y^2$, e) $y = z^2 - x^2 + 1$

f) $z^2 + 2x^2 - y^2 - y = \frac{1}{4}$ g) $z^2 + x^2 + y^2 + x + y = 0$, h) $(1-x)^2 + 3y^2 - 4z^2 = -4$

6) Aşağıdaki denklemlerin tiplerini belirtiniz.

a) $z_x = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} z + \frac{\cos y^2}{\sin x^2} + 1$ b) $(z_x + z_y - 1)^2 + z = e^{xy} z_{xy} + z_x + z_y + 1$

c) $z_x (1 - z_{xy})^2 + 2 z_{yy} + x z_{xx} = x z_y + yz$

d) $x z_{xx} - 3y z_{yy} + \frac{1}{x-y^2} z_{xy} + (z_y + 1) z_{xxx} = z \ln(\sin y) + 2$

Not! Sadece dört soru seçerek cevaplandırınız. Başarılar
N.A.

*) $z + x = h\left(\frac{x}{y-x}\right) + k\left(\frac{y}{y-x}\right) + f(\sin^2(xy)) + g(e^x + 1/e^x)$
$+ l(\cos(2xy)) + m(\cosh x) + n(x+1)$

ifadesi sizce kaçıncı mertebeden bir kısmi dif. denklemin genel çözümüdür. h, k, f, g, l, m, n keyfi fonksiyonlardır.

Kısmi Dif Denk Çözümler (Arasınav)

1) $A(x_0,-1,0)$ $2x=3(z+1)^2+x^2-3y^2+1$ yüzeyinin üzerinde olduğundan $2x_0=3(0+1)^2+x_0^2-3.(-1)^2+1 \Rightarrow x_0^2-2x_0+1=0$ $(x_0-1)^2=0$
$x_0=1$ olur. $A(1,-1,0)$ dır. Yüzeyin bu noktada normal vektörü yüzey kapalı fonksiyon şeklinde old.dan
$F(x,y,z)=-2x+3(z+1)^2+x^2-3y^2+1=0 \Rightarrow F_x=-2+2x \Rightarrow F_x|_A=-2+2=0$
$F_y=-6y \Rightarrow F_y|_A=6$, $F_z=6(z+1)$ $F_z|_A=6$ olur. O halde
$\vec{N}|_A=(F_x|_A, F_y|_A, F_z|_A) \Rightarrow \vec{N}|_A=(0,6,6)$ olur.
Teğet düzlem denklemi $\langle \vec{N}|_A, \vec{PA} \rangle=0$ $(P(x,y,z))$
$\langle(0,6,6),(x-1,y+1,z)\rangle=0 \Rightarrow 6(y+1)+6z=0 \Rightarrow \underline{y+1+z=0}$

---

2) $M(a,b,c)$ ve yarıçapı r olan küre denklemi
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ dir. $r=1$ ve $M(a,b,c)$ nok. $z=0$ düzlemi üzerinde old.dan $c=0$ olur. Buna göre $M(a,b,c)$ olur. Küre ailesinin denklemi
$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=1$ $\Rightarrow$ iki keyfi sabit old.dan k.d.denklem birinci mertebeden çıkacaktır. Buna göre

$2(x-a)+2zz_x=0$ $\quad x-a=-zz_x$ $\Big\}$ Denklemde yerine
$2(y-b)+2zz_y=0$ $\quad y-b=-zz_y$ $\Big\}$ yazılırsa

$\boxed{(-zz_x)^2+(-zz_y)^2+z^2=1}$ olur.

3) $y=f(x)+g(z)$ iki keyfi fonk old.dan k.d.denklem ikinci mertebeden olacaktır. x'e göre türev $0=f'+g'(z).z_x$
$0=f''(x)+g''(z).z_x.z_x+g'(z)z_{xx}$, y'ye göre türev $1=g'(z).z_y$ y ye göre türev

$\left.\begin{aligned} 0&=g''(z).z_yz_y+g'(z)z_{yy} \\ 0&=g''(z)z_yz_x+g'(z)z_{xy} \end{aligned}\right\}$ Homojen denklem sisteminin g'' ve g' ye göre sıfırdan farklı çözümü old.dan $\begin{vmatrix} z_yz_y & z_{yy} \\ z_yz_x & z_{xy} \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{(z_y)^2z_{xy}-z_yz_x z_{yy}=0}$ olur.

3) $F(\cos x+yz, e^{-y}+z^2)=0$ $\left.\begin{array}{l} u=\cos x+yz \\ v=e^{-y}+z^2 \end{array}\right\}$ olursa

k.l.dent $\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\sin x+yz_x & 2zz_x \\ z+yz_y & -e^{-y}+2zz_y \end{vmatrix}=0$

$(-\sin x+yz_x)(-e^{-y}+2zz_y)-2zz_x(z+yz_y)=0$ olu

$\Rightarrow \underline{e^{-y}\sin x-ye^{-y}z_x-2z\sin x z_y-2z^2z_x=0}$

4) $z_x+2xz_y+\frac{2x}{y}z=y-x^2-1$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1} \Rightarrow dy=2xdx$

$y=x^2+c \Rightarrow y-x^2=c \Rightarrow \eta=y-x^2,\ \xi=x$ $\quad \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2x & 1 \end{vmatrix}=1\neq$

$\left.\begin{array}{l} z_x=z_\xi\xi_x+z_\eta\eta_x \Rightarrow z_x=z_\xi+z_\eta(-2x) \\ z_y=z_\xi\xi_y+z_\eta\eta_y \Rightarrow z_y=z_\eta\cdot 1 \end{array}\right\}$ denklemde yerine yazılırsa

$z_\xi+\cancel{z_\eta(-2x)}+\cancel{2xz_\eta}+\frac{2x}{y}z=y-x^2-1$

$z_\xi+\frac{2x}{y}z=\eta-1$ $\quad \xi=x$ old. dan $\eta=y-\xi^2 \Rightarrow y=\eta+\xi^2$ olu

$z_\xi+\frac{2\xi}{\eta+\xi^2}z=\eta-1 \Rightarrow \lambda(\xi,\eta)=e^{\int\frac{2\xi}{\eta+\xi^2}d\xi}=e^{\ln(\eta+\xi^2)}=\eta+\xi^2$

$(\eta+\xi^2)z=\int(\eta+\xi^2)\cdot(\eta-1)d\xi+h(\eta) \Rightarrow (\eta+\xi^2)z=(\eta-1)\int(\eta+\xi^2)d\xi+h(\eta)$

$(\eta+\xi^2)z=(\eta-1)(\eta\xi+\frac{1}{3}\xi^3)+h(\eta) \Rightarrow (y-x^2+x^2)z=(y-x^2-1)((y-x^2)x+\frac{x^3}{3})$
$+h(y-x^2)$ olu

---

5) a) Düzlem b) Parabolik silindir c) Hiperbolik silindir d) Paraboloid
e) Hiperbolik paraboloid (Semer) f) Koni g) Küre h) çift kanatlı hiperboloid

---

6) a) Lineer
Yarı lineer
hh. lineer

b) Lineer değil
Yarı lineer
hh lineer

c) Lineer değil
Y. lineer değil
hh lineer değil

d) Lineer değil
Y. lineer
hh lineer değil

*) Üçüncü mertebeden bir kısmi dif denklemin genel çözümüdür.